PDF 静态阅读版 · 保留正文与矢量公式。可使用目录链接及书签跳转；查看或复制公式 LaTeX 源码，请打开配套 HTML。

正多面体与欧拉公式笔记

第二版 · 2026-10-15（北京时间）

从“为什么凸正多面体只有五种”出发，逐步追问顶点角和、欧拉公式与平面分割的依据。本文把直观图景、证明和引用的基础结论分开：主线只讨论有限条线段，不要求先学习一般若尔当曲线定理。

本版新增 15 幅证明图（另保留原有 2 幅示意图）。建议先看图注和颜色对应，再读紧随其后的论证；窄屏可横向滑动较宽的证明图。

阅读建议：先读第 1—3 章把握分类，再读第 4—9 章检查欧拉公式；第 10 章补几何路线，第 11 章补存在性与唯一性的依据，第 12 章回看原对话中的疑问。

正文目录

第 1 章：讨论对象与证明任务 3

第 2 章：两条路线为何得到同一限制 4

第 3 章：五组整数解与五种立体 6

第 4 章：只需简单多边形的分割定理 7

第 5 章：凸多面体怎样变成直线平面图 10

第 6 章：树为什么有 V−1 条边 11

第 7 章：树为什么只有一个面 13

第 8 章：加回一条边为什么恰好多一个面 14

第 9 章：完成欧拉公式的证明 17

第 10 章：顶点角和小于 360° 的几何证明 19

第 11 章：存在性、唯一性与证明的边界 22

第 12 章：问题回查、练习与来源 25

第 1 章：讨论对象与证明任务

返回目录

1.1 凸多面体的严格含义

本文的凸多面体是三维空间中有界、内部非空的有限个闭半空间的交：

$$P = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^3 : a_i \cdot x \le b_i\}.$$

其中 $a_i \neq 0$。作为集合，它包含内部和边界。“凸”意味着任取 $A, B \in P$，连接二者的整条线段仍在 P 中：

$$(1-t)A + tB \in P \qquad (0 \le t \le 1).$$

每个半空间都具有这个性质，交集也具有这个性质。反过来，有界的多面体若具有线段凸性，可以用其各面的支撑半空间表示；这里引用这一标准等价刻画。立方体的例子是 $0 \le x, y, z \le 1$。

面取极大的二维平面面；不会把一个正方形随意划成两个三角形后，把对角线当作原多面体的棱。顶点取真正的极点，棱取一维面。

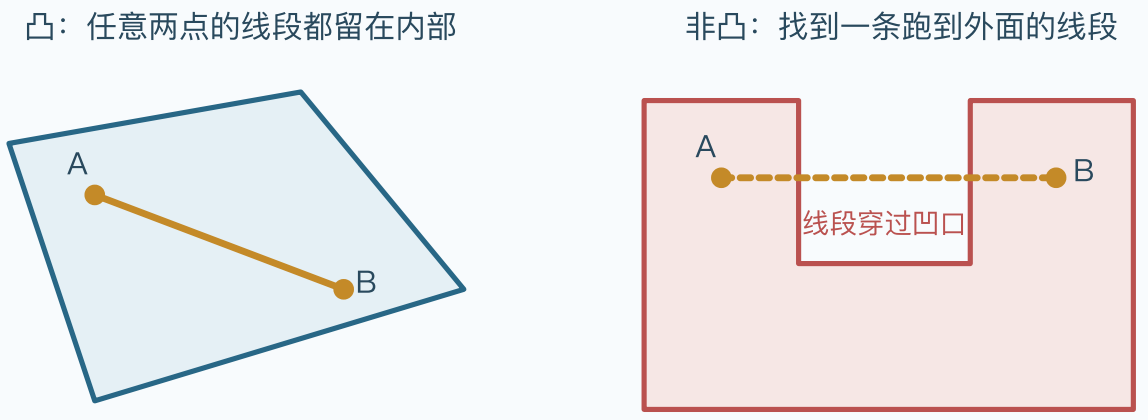


图 1 | 先看截面：左图只展示一个例子，凸性要求对所有两点成立；右图的一条反例线段已经足以否定凸性。

1.2 正多面体与参数

通常的凸正多面体要求整体对称：其欧氏对称群对所有“顶点—棱—面”的关联旗标传递。旗标就是一个顶点、一条包含它的棱、一个包含该棱的面的组合；允许对称包含反射。

这蕴含两个分类时要用的性质：所有面都是全等的正 p 边形；每个顶点都有相同的 q 个面相交，也有 q 条棱相接。这里 $p, q \geq 3$。

初读时可以先用这两个性质计数；不要把“各面正且每个顶点面数相同”未经说明就当成一般情形下整体对称性的定义。第 11 章的唯一性讨论使用上面的整体正则性。

用 V, E, F 分别表示顶点数、棱数、面数。分类需要三件事：限制可能参数；构造对应立体；说明同一参数没有另一种不相似的凸正多面体。仅枚举参数尚未完成后两件事。

第 2 章：两条路线为何得到同一限制

返回目录

2.1 从局部角度出发

正 p 边形的每个内角是 $\alpha = (p-2)\pi/p$。凸多面体的真正顶点处，相邻面的面内角之和严格小于 2π，其证明见第 10 章。因此

$$q\frac{(p-2)\pi}{p} < 2\pi.$$

先约去正数 π，再乘以正数 p，得到 $q(p-2) < 2p$，即 $pq - 2p - 2q < 0$。两边加 4 并因式分解：

$$\boxed{(p-2)(q-2) < 4}.$$

2.2 从整体计数出发

每个面有 p 条棱，但每条棱被两个面共享；每个顶点有 q 条棱，但每条棱有两个端点。所以

$$pF = 2E, \qquad qV = 2E.$$

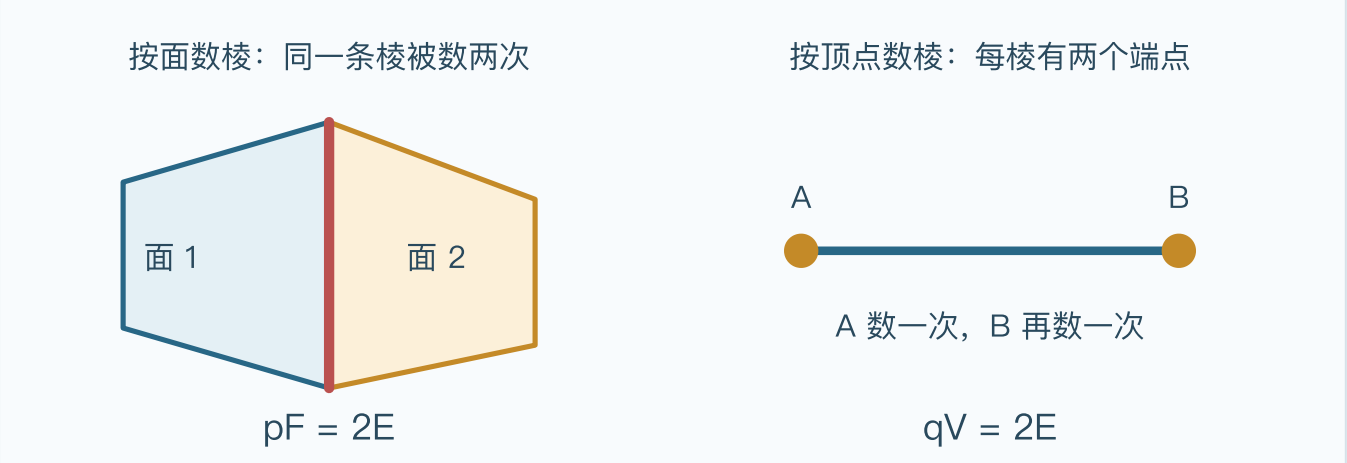


图 2 | 两条双重计数等式，都来自“同一个对象被数了几次”。

将 $F = 2E/p$、$V = 2E/q$ 代入将于第 9 章证明的欧拉公式 $V - E + F = 2$：

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2.$$

由于 $E > 0$，两边除以 $2E$ 并移项：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E} > \frac{1}{2}.$$

乘以正数 $2pq$，得到 $2p + 2q > pq$，再整理就得到同一不等式。严格大于来自 $1/E > 0$，没有额外的几何假设藏在这一代数步骤中。

两条路线可以分别成立：欧拉公式的证明不需要预先知道顶点角和；顶点角和的证明也不需要欧拉公式。

第 3 章：五组整数解与五种立体

返回目录

3.1 不漏项地枚举

令 $a = p - 2$、$b = q - 2$，则 a, b 是正整数，且 $ab < 4$。

若 $a = 1$，则 $b = 1, 2, 3$；若 $a = 2$，则只能 $b = 1$；若 $a = 3$，也只能 $b = 1$；若 $a \geq 4$，任何正整数 b 都不可能。因此恰好五组参数。

每面边数 p	每顶点面数 q	立体	V	E	F
3	3	正四面体	4	6	4
3	4	正八面体	6	12	8
3	5	正二十面体	12	30	20
4	3	正六面体（立方体）	8	12	6
5	3	正十二面体	20	30	12

计数可以由参数反算：

$$E = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \qquad V = \frac{2E}{q}, \qquad F = \frac{2E}{p}.$$

例如 $p = 4, q = 3$，分母为 $8 + 6 - 12 = 2$，所以 $E = 12$、$V = 8$、$F = 6$。

3.2 为什么正六边形不行

正六边形每角 $120°$，至少三面相交就达到 $360°$，不满足凸顶点的严格不等式。边数更多的正多边形内角更大，也被排除。

这里排除的是三维凸正多面体；不排除平面铺砌，也没有在讨论允许自交的星形正多面体。

第 4 章：只需简单多边形的分割定理

返回目录

4.1 精确陈述

简单闭折线是由有限条线段首尾相接组成的闭合曲线，除了相邻线段的共同端点，没有其他交点。共线的多余中间顶点可以删去。

简单多边形分割定理： 平面去掉这样一条闭折线后，恰好剩下两个连通区域，一个有界，一个无界；曲线是两个区域共同的边界。任意一个边内部小点附近，边的两侧分别属于这两个区域。

这是若尔当曲线定理的多边形情形。一般定理允许任意简单闭曲线，本文用不到那样的一般性。下面给出有限线段情形的证明，并把“至少两个”与“至多两个”分开。

4.2 有限线段的窄带构造

沿闭折线选定一个行进方向。每条边内部都有左侧和右侧；绕过一个顶点时，左侧小路和下一条边的左侧小路在该顶点的小圆盘中接起来，右侧也如此。

为什么能选得足够窄？先给有限多个顶点选两两不交的小圆盘，每个圆盘只遇到该顶点的两条关联边；再给圆盘外的各边中段选窄矩形。互不相交的非关联紧线段之间距离为正，且只有有限对，所以这些矩形可以避开所有其他边。在每个顶点盘内，两条半径把圆盘分为两个扇形，分别接通相应的两条侧路。

于是整圈形成两条互不相交、各自连通的侧路：一条始终沿左侧，一条始终沿右侧。这个局部构造只用了线段、圆盘和正距离；没有预先假定多边形已有内外两区。

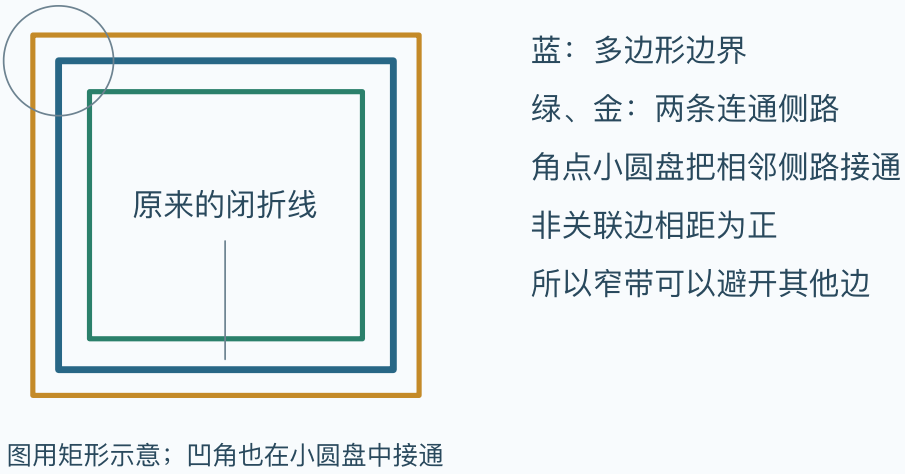


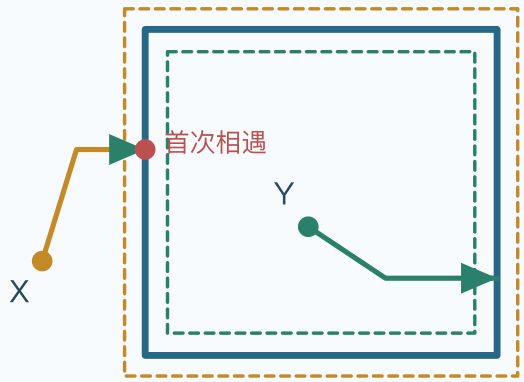
图 3 | 把闭折线想成一条很窄的道路：两侧各有一条不中断的路。有限性保证窄带不会误碰远处的边。

4.3 为什么至多两个区域

取补集中的任意点 X，选边内部一点 M，用一般位置的折线路径从 X 走向 M：避开顶点，且不沿边行走。选取它第一次碰到多边形的位置；在碰到之前，这条路完全在补集中。

首次相遇位于某条边内部，从该边的一侧接近。因此 X 可以在补集中连接到刚才构造的左侧路或右侧路。每一侧路自身连通，所以补集至多有两个连通区域。

这里“任意点都能接到某侧路”比“曲线附近有两侧”更强；后者单独不能排除远处还有第三个区域。



从任意一点走向边界

只保留第一次碰到边界前的路

这段路始终没有跨越边界

终点接到某一侧路

因此不会漏掉“第三个分支”

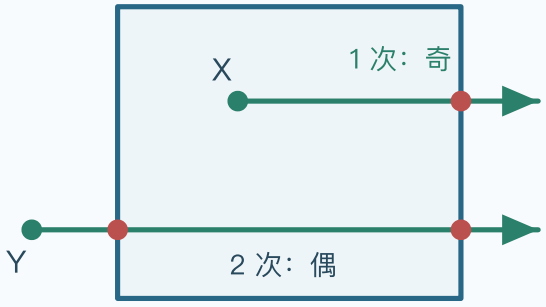
图 4 | “至多两个”的关键不是只看边附近，而是把任意远处的点，都接回两条侧路之一。

4.4 为什么两侧不能再绕路相通

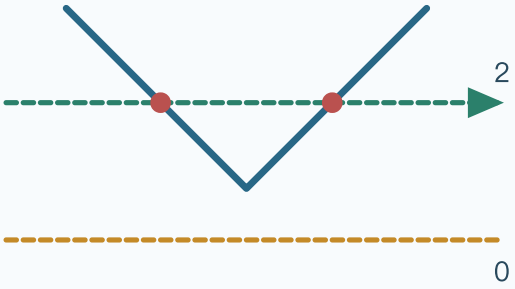
选一条不平行于任何边的固定射线方向。对一般位置的点 X，数从 X 沿此方向射出的射线与多边形相交的次数，只记录奇偶性。

当起点在不碰多边形的情况下作小幅移动时，交点正常移动；射线越过一个顶点方向时，两条关联边的交点要么同时出现或消失，要么一个交点换到另一条边，因此奇偶性不变。射线经过顶点的特殊位置用邻近一般位置定义，左右值一致。

射线向右：内点一次，外点两次



射线越过顶点：交点成对变化



局部 2 ↔ 0，奇偶性不变

图 5 | 左图说明奇偶标签能区分两侧；右图只画顶点附近的局部变化，新增或消失的交点成对出现，不改变奇偶性。

这给补集上一个局部不变的奇偶标签。沿任何连续路径，该标签都不变。可选边内部一点，使经过它的测试直线不经过任何顶点；在该点两侧取充分近的两点，两条射线的交点数相差一。因此两侧标签不同，不能在补集中连通。

结合“至多两个”，恰好两个。多边形是有界的，大圆盘外的区域连通，故至多有一个无界分支；另一分支有界。每条边的两侧分别接到两区，顶点用相邻边逼近，得到共同边界的结论。

> 奇偶性只负责区分两侧；窄带和首次相遇论证负责排除第三个分支。只讲“射线相交次数一奇一偶”并没有单独完成整个证明。

第 5 章：凸多面体怎样变成直线平面图

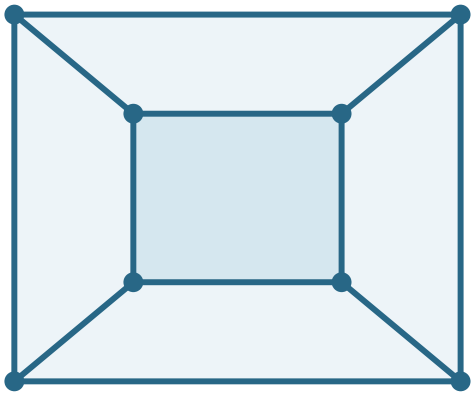
返回目录

5.1 透视投影，而非剪开展开

选择凸多面体的一个面 f，在该面相对内部一点的外侧选一个充分靠近的观察点 S。选得足够近时，S 只违反面 f 的半空间约束，仍严格满足所有其他面的约束。

从 S 向面 f 的内部发出一条射线：它先穿过 f 进入凸体，再从另一处边界离开。凸性保证射线与凸体的交集是一个线段，所以不会反复进出。反过来，其他面的点投到 f 所在平面时，投影都落在 f 内。

因此，将除 f 内部外的表面投影到 f 的平面，得到嵌在面 f 轮廓内的图。不同的内部边不会交叉：若交叉，就意味着同一条视线有两个不同的离开点。直线透视投影仍是直线，所以图中的边可以取线段。这种图称为 Schlegel 图。



立方体：8 个顶点，12 条边

图内有 5 个有界区域

外部无界区域也算一个面

所以 F = 5 + 1 = 6

5.2 为什么面数没有少一个

未选中的面对应图内有界区域；选中的面 f 对应图外无界区域。因此总面数仍是原来的 F，顶点和棱也保持一一对应。不能一边删掉一个面，一边又忘记把外部区域计入。

原多面体的边图连通：例如各面沿公共棱连接成整张凸体表面，每个面的边界连通；也可从凸体表面径向投到球面看出表面连通，面间的连续路线可以绕开有限个顶点而依次跨棱。故得到有限、连通的直线平面图。

下文的面，统一定义为平面去掉图后的连通分支，包括无界分支。平面开集的连通分支都是折线道路连通的：固定一点，能用有限折线到达的点组成开集，其余点也组成开集；连通性迫使后者为空。这一事实让后面的“选一条折线路径”有了依据。

第 6 章：树为什么有 V−1 条边

返回目录

6.1 树与生成树

树是有限、连通且没有简单回路的图。生成树保留原图全部顶点，只选取一部分边，并形成树。

生成树为什么存在？只要当前连通图还有回路，就删去回路上的一条边。该边两端仍能沿回路剩余部分连接，所以连通性不变。边数有限，删除过程终止，最后就是生成树。这个构造还没有用到面数或欧拉公式。

6.2 用最长路径找叶子

叶子是度数为 1 的顶点。至少有两个顶点的有限树中，选一条顶点不重复的最长路径，考虑端点 A。

A 至少有一条相邻边。假如它还有另一条边通向 B：若 B 不在路径上，就能延长路径；若 B 在路径上，就形成回路。两者都矛盾。因此 A 恰好只有一条相邻边。

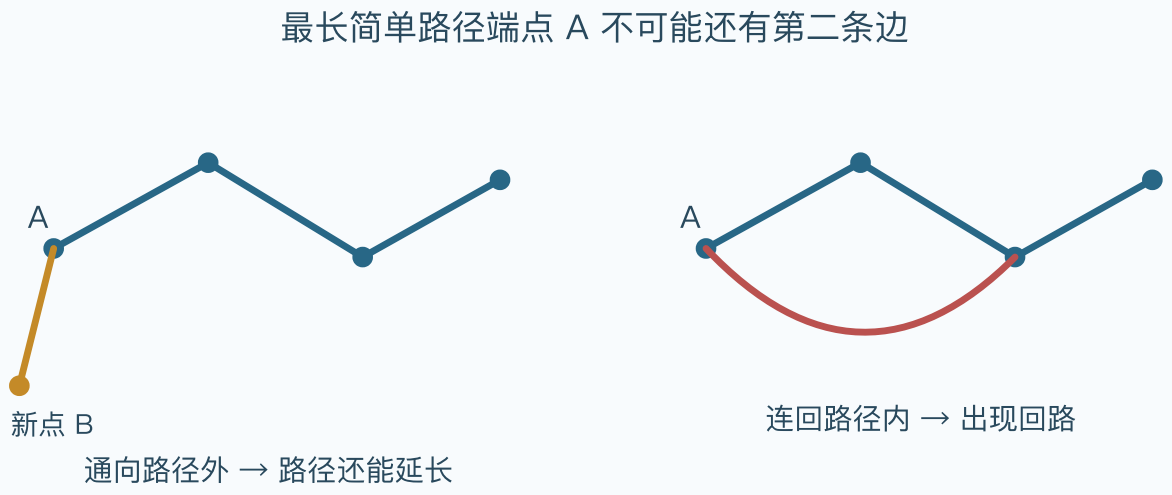


图 6 | 叶子存在的两个反证分支：第二条边若通向新点，违背最长；若通向旧点，违背无回路。

删除叶子及其边后，剩下的图仍连通：两个剩余顶点间的简单路径不可能以叶子作中间点；也仍无回路。

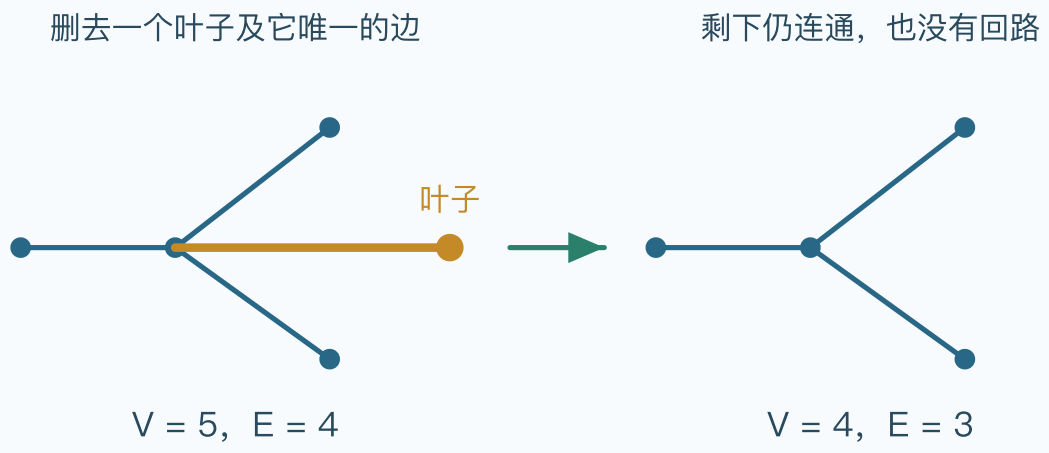


图 7 | 每次删除都让顶点数和边数同时减一。一直删到单点，反过来就得到 E = V−1。

6.3 归纳计数

单顶点树的边数为 0。对 $V \geq 2$，删掉一个叶子及其边，剩下 $V-1$ 个顶点。由归纳假设，剩下 $V-2$ 条边，加回被删的一条：

$$E = (V-2) + 1 = V - 1.$$

这比“每加入一个顶点就加一条边”完整，因为我们先证明了任意有限树都确实可以按这种方式逐步拆开。

第 7 章：树为什么只有一个面

返回目录

7.1 有限线段的绕行引理

设在一个直线平面图上增加一条线段 AB：A 是已有顶点，B 是新顶点，线段除 A 外不碰原图。这样的边是悬挂边。增加它不会改变补集的连通分支数。

证明要解释为什么两侧仍能互通。它的内部和新端点都位于原图的同一个面 Ω。取该面中避开新线段的任意两点，先在 Ω 中用折线连接；稍作扰动，让它与新线段只在有限个内部点横交，且避开 A, B。

若路径穿过线段，可以沿线段一侧走向自由端 B，绕 B 一个小半圆，再沿另一侧返回，替代原来的穿越。路径与线段的交点有限，并且全离 A 有正距离，故只需在远离 A 的紧子线段周围选一个避开原图的窄通道。这个通道连同 B 的小圆盘完全在 Ω 内。

逐次替换有限个穿越，得到完全避开新线段的路径。因此 Ω 没有被分裂。其他面没有受到影响，且增加障碍不能把原本不同的面合并，所以面数不变。

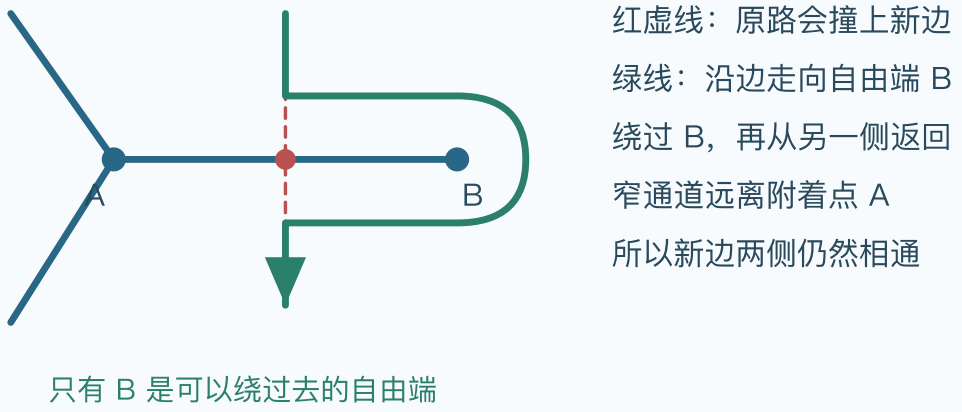


图 8 | 树不分割平面的核心动作：把一次“穿过边”替换成“绕自由端”。这一步可对有限多个交点逐一进行。

7.2 为什么“没有回路”不是充分的解释文字

“没有回路，所以没有围出区域”描述的是正确图景，但直接把它当作理由，仍然省略了平面连通性的论证。上面的自由端绕行给出可逐步检查的依据。

单个点的补集连通：连接任意两点的折线若碰到它，绕一个小圆弧即可避开。从单顶点树出发，按第 6 章删除叶子的逆过程，逐条增加悬挂边；每一步面数不变，所以

$$\boxed{F_{\text{tree}} = 1}.$$

这里没有用欧拉公式倒推，因此不存在循环论证。

第 8 章：加回一条边为什么恰好多一个面

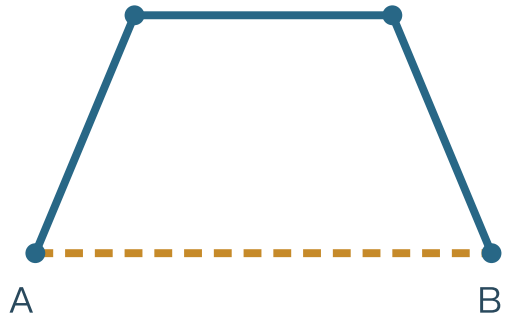
返回目录

8.1 条件必须说全

设 G 已经有限、连通且直线嵌入平面。增加一条边 $e = AB$，两端 A, B 是不同的已有顶点；内部不碰原图。我们要证明

$$F(G+e)=F(G)+1.$$

e 的内部是连通的，又完全在补集中，所以它位于某一个原面 Ω 内。其他面的内部没有被改变，因此只需研究 $\Omega \setminus e$。



蓝线：已有简单路径 P

金线：加回的新边 e

P 与 e 合起来成为简单闭折线

其他已有边可以在图中继续延伸

8.2 至少分成两个面

由于 G 连通，原图中存在从 A 到 B 的简单路径 P。路径不重复顶点，原图边不交叉，而 e 的内部不碰原图，所以 $P \cup e$ 是简单闭折线。

由第 4 章的多边形分割定理，这条闭折线的两侧不连通。在新边中点附近，选一个小圆盘，避开所有原图；盘内新边两侧的点 X, Y 原来都在 Ω，现在却分别位于闭折线的两区。

任何避开 $G+e$ 的路径也必避开 $P \cup e$，故不能连接 X, Y。因此 Ω 至少分成两个面。

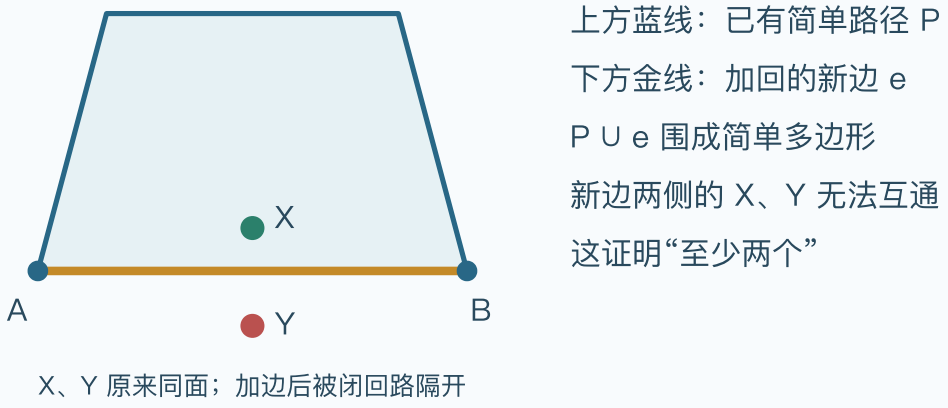


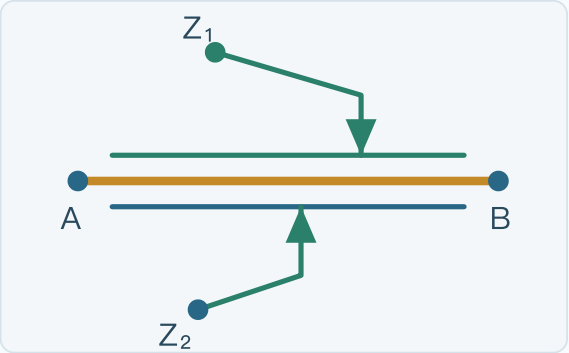
图 9 | 同样是加一条边，这次没有自由端：两端早已被旧路径连起来，绕过端点也无法逃开整个闭回路。

8.3 至多分成两个面

沿新边内部有左右两条侧通道。这里不要求有一个固定宽度一直延伸到端点：只需任意两个内部位置间的紧子线段周围有避开原图的窄矩形，就能在同侧相互连接。原图只有有限条线段，且与这段紧子线段不相交，所以这样的宽度存在。

取 $\Omega \setminus e$ 中任意一点 Z。由于 Ω 折线道路连通，可以在 Ω 中用折线走向新边中点；扰动路径，使它避开端点并横交线段。考察第一次碰到 e 之前的部分，它把 Z 接到新边某一侧的通道。

所以每个新分支都接到左侧通道或右侧通道；每一侧自身连通，至多对应一个分支。因此至多两个。



灰底：原来的同一个面 Ω

任意点沿原面走向新边

首次碰边前，接到一侧通道

同侧各点可沿窄通道相连

因此每侧至多一个分支

图 10 | “至多两个”另有理由：所有新分支都必须接到上、下两条通道之一。通道只沿边内部走，不要求在端点处保持固定宽度。

8.4 合并结论

至少两个且至多两个，故一个原面恰好分为两个；其他面不变。这才得到

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta E = 1, \qquad \Delta F = 1.$$

只引用“闭曲线有内外两区”足以帮助区分两侧，却不能代替第 8.3 节对其他分支的排除。另一个重要条件是连通性：如果新边连接两个不同连通分量，它可能只是把分量接起来，并不产生新面。

第 9 章：完成欧拉公式的证明

返回目录

9.1 从生成树加回原图

取连通直线平面图 G 的一棵生成树 T。第 6—7 章证明了

$$E(T) = V - 1, \qquad F(T) = 1.$$

所以对这棵树，$V - E(T) + F(T) = V - (V - 1) + 1 = 2$。

现在依次加回原图中不属于树的边。因为始终保留着生成树，当前图始终连通；由于加回的都是原来平面图的边，也不会发生交叉。因此每一步都满足第 8 章的条件：边数和面数同时增加一，顶点数不变。

$$\Delta(V-E+F)=0-1+1=0.$$

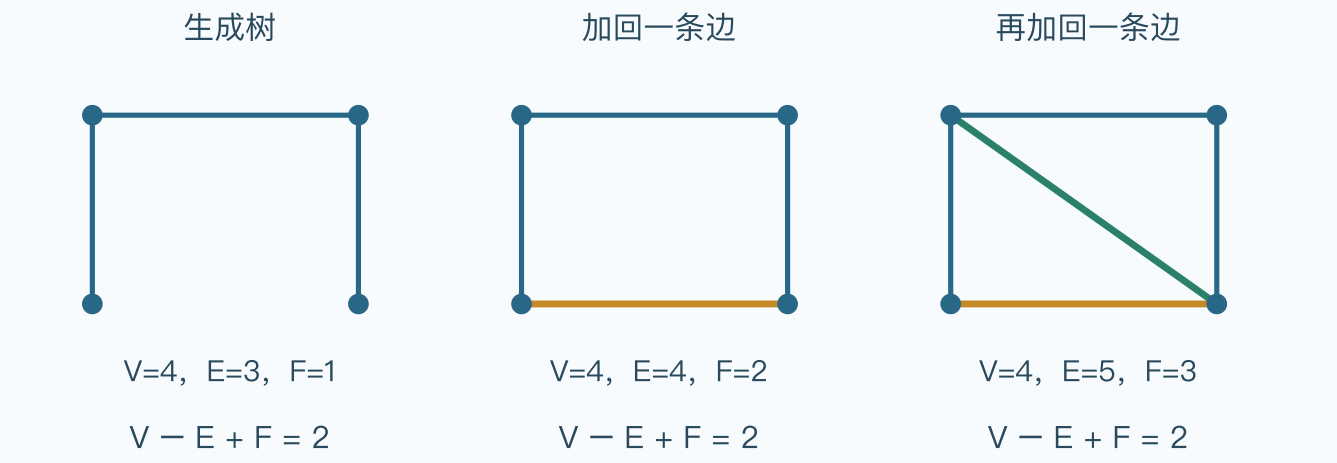


图 11 | 从同一组顶点出发：每加回一条边，就多一个面。减去的 E 与加上的 F 同时增一，差值不变。

全部加回后得到

$$\boxed{V-E+F=2}.$$

也可直接数：一共加回 $E-(V-1)$ 条边，所以
$F=1+E-(V-1)=E-V+2$。

第 5 章给出凸多面体与这种平面图的对应，故凸多面体同样满足该式。这个证明没有依赖正多面体条件。

9.2 适用范围与常见误用

对具有 c 个连通分量的有限平面图，公式是 $V-E+F=1+c$，仍把外部算一个面。可用每个分量的一棵树组成的生成森林重复上述计数；有限个互不相交的树的补集仍连通，用第 7 章绕行逐棵加入即可。

带孔的闭合多面体表面未必满足 2。对于连通、闭合、可定向的曲面，若有 g 个柄，并采用每面都是圆盘的有限胞腔分解，则欧拉示性数为 $2-2g$。这是延伸背景，本文不证明，也不用于分类。

证明依赖关系是：有限线段的局部绕行与多边形分割 → 树的面数和加边引理 → 欧拉公式 → 正多面体的参数限制。没有从欧拉公式反推其中的引理。

第 10 章：顶点角和小于 360° 的几何证明

返回目录

10.1 先证明空间夹角三角不等式

设 u, v, w 是单位向量，令 $\alpha = \angle(u, v)$、$\beta = \angle(v, w)$、$\gamma = \angle(u, w)$，取值均在 $[0, \pi]$。目标是 $\gamma \le \alpha + \beta$。

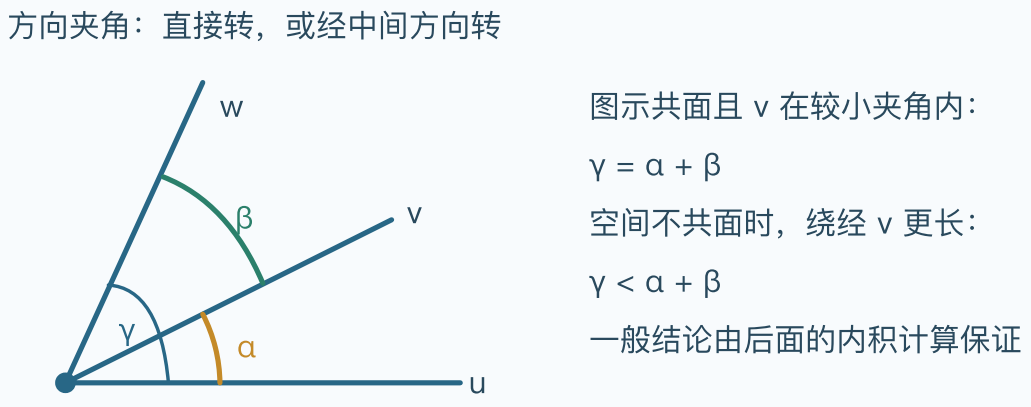


图 12 | 先把不等式读成“方向之间的距离”：经中间方向绕行，不会比直接转过去更短。图中画的是取等的共面情形，严格号要由非共面条件推出。

若 α 或 β 为 0，结论直接成立；若有一个为 π，则右边至少为 π，结论也成立。其余情形可写为

$$u = \cos\alpha\, v + \sin\alpha\, a, \qquad w = \cos\beta\, v + \sin\beta\, b,$$

其中 a, b 都是垂直于 v 的单位向量。由 $a \cdot b \geq -1$，

$$\cos\gamma = u \cdot w \geq \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta).$$

当 $\alpha+\beta \leq \pi$ 时，用余弦在 $[0,\pi]$ 上严格递减，得出目标结论。当 $\alpha+\beta > \pi$ 时，直接用 $\gamma \leq \pi < \alpha+\beta$，不在错误的区间反用余弦单调性。

若三个向量线性无关，a, b 不可能反向，且 $\sin\alpha\sin\beta > 0$，所以内积不等式严格。结合上面的分情况，得到 $\gamma < \alpha+\beta$。

10.2 用平面截去一个真正顶点

设凸多面体的顶点为 O，相邻棱有 n 条。存在一个线性函数在 O 处严格小于所有其他顶点：例如把 O 处各关联面的向内距离函数相加，和为零仅可能位于这些支撑面的公共交点 O。充分靠近 O 的小正水平面便能分离 O 与其他顶点。

该平面逐条截到从 O 发出的棱，形成凸 n 边形 $A_1 \cdots A_n$；在每个原面内截出三角形 OA_iA_{i+1}。各 A_i 都是截面真正的顶点，相邻三点不共线。

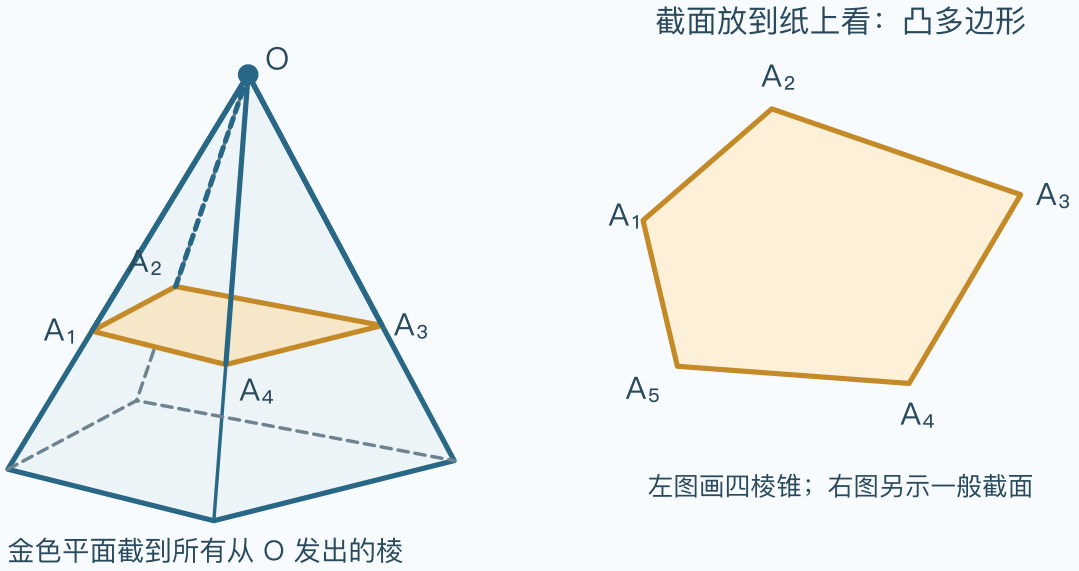


图 13 | 先用一张平面截掉顶点附近的小角：原来的各个面，在小棱锥中变成侧三角形。截面是平面凸多边形，内角和可以直接使用。

记顶角 $\theta_i = \angle A_i O A_{i+1}$，底角为 $\alpha_i = \angle O A_i A_{i+1}$ 与 $\beta_i = \angle A_i A_{i+1} O$，下标循环。三角形内角和给出

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = n\pi - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i).$$

在底面顶点 A_i，记底面内角为 γ_i。从 A_i 指向 A_{i-1}, O, A_{i+1} 的三个向量线性无关：前后邻点决定截面平面，O 不在此平面中。所以第 10.1 节给出

$$\gamma_i < \beta_{i-1} + \alpha_i.$$

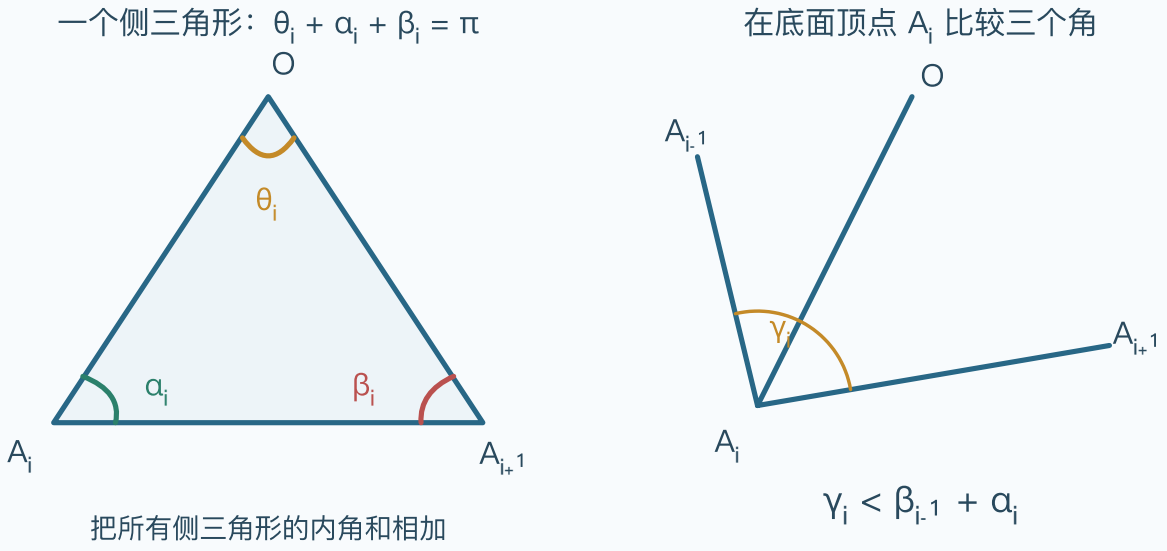


图 14 | 左图负责角度记账；右图中 O 在截面之外，三条射线不共面，所以底面角 γ_i 严格小于绕经 O 的两个角之和。空间射线在纸上的夹角仅作标记，不按比例量角。

把所有不等式相加，并用凸 n 边形内角和，得到

$$(n-2)\pi = \sum_i \gamma_i < \sum_i (\alpha_i + \beta_i).$$

代回：

$$\sum_i \theta_i < n\pi - (n-2)\pi = 2\pi = 360^\circ.$$

这就证明了第 2 章使用的几何事实。严格号来自非共面性，凸性保证存在正确的截面及其循环次序。

10.3 角亏不能被过度解读

定义顶点角亏 $\delta = 2\pi - \sum_i \theta_i$。凸多面体的真正顶点必有正角亏。

但仅仅给定角和小于 2π，不能据此保证一整套多边形能闭合成凸多面体，也不能把正角亏反过来等同于任意嵌入曲面的局部凸性。角亏是内禀量，空间中是否凸还涉及嵌入方式。

角和等于 2π 表示内禀平坦，不要求折叠后的面片都在同一个平面；一张纸经折叠就是反例。大于 2π 则排除了凸多面体真正顶点，但可出现在非凸的鞍形结构中。

第 11 章：存在性、唯一性与证明的边界

返回目录

11.1 五种立体怎样存在

以下点集的凸包给出具体构造；整体缩放不改变类型。

立体	顶点坐标或构造
正四面体	$(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$
立方体	$(\pm1,\pm1,\pm1)$ 的全部八种组合
正八面体	$(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$
正二十面体	$(0,\pm1,\pm\varphi),(\pm1,\pm\varphi,0),(\pm\varphi,0,\pm1)$，每对正负号独立，$\varphi=(1+\sqrt{5})/2$

立体	顶点坐标或构造
正十二面体	上述正二十面体的极对偶；以其每个三角形面的中心作顶点，取这些点的凸包，所得与极对偶相似

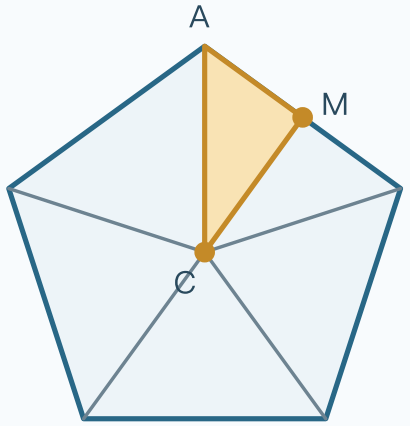
前三个例子可直接算距离及支撑平面。二十面体也可用 $\varphi^2 = \varphi + 1$ 核对：顶点等半径，棱长均为 2，有二十个等边三角形支撑面，每顶点相接五面。正十二面体与二十面体互换顶点和面：每个二十面体顶点周围的五个面中心形成一个正五边形。

要说明“正”还需整体对称，而不能只数边。本构造的正二十面体顶点邻点围绕顶点轴呈五重旋转对称，顶点图连通且可用这些对称将邻接顶点互换，结合保持一个顶点的五重旋转和镜面对称，得到旗标传递；极对偶继承对称并将顶点与面对换。附带坐标检查程序保存了各支撑面、棱长、顶点度数与所有旗标对称的数值核对，供复算，数值检查不代替精确的坐标恒等式。

11.2 为什么同一参数只有一种：球面旗标三角形

这里给出唯一性的标准几何论证概要，并明确引用一个球面几何结论：角均在 $(0, \pi)$ 的凸球面三角形由三个角唯一确定到球面等距变换。它可由球面余弦定理证明，本文不另行展开球面三角学。

对凸正多面体，把全部顶点的平均值取作原点 O。旗标传递意味着顶点传递，所以所有顶点在同一个以 O 为球心的球面上。对一面选其中心 C，对一条棱选中点 M，对其端点选 A；把射线 OC, OM, OA 投到单位球面。



金色小三角形代表一个旗标
从多面体中心径向投到球面
得到全等的球面旗标三角形
三个角为 π/p、π/2、π/q
图中只画面内标记，未画球面角

先在一个面上找：顶点 A、棱中点 M、面中心 C

图 15 | 唯一性补充中的基本小块。先在面内认清 A、M、C，再把三条中心射线投到球面；球面角不等于左图平面角。

每个面被中心与边中点分成 $2p$ 个旗标三角形。球面上这些三角形全等，三个角分别是

$$\frac{\pi}{p}, \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{q}.$$

其中面中心周围有 $2p$ 个全等角，棱中点周围有四个，顶点周围有 $2q$ 个。这些三角形确实构成球面铺分，因为从凸体内部径向投影到球面是一一对应的。

固定一个旗标三角形后，邻接三角形就是它关于公共大圆边的反射：两个全等球面三角形沿相应边接合，另一侧的放置唯一。铺分的邻接关系连通，逐个跨边便强制确定整张铺分。因此同一 (p, q) 的两个凸正多面体，球面旗标铺分在一个等距变换下重合。把外接球半径归一化后，其顶点重合，凸包也重合；原立体因而相似。

这说明参数限制确实限制了类型数，而不仅仅是限制五组计数。结合第 11.1 节的构造，得到恰好五种。若不学习本节球面结论，可以把本节作为分类补充：前九章已经完整给出欧拉公式及五组候选参数的推导。

11.3 哪些基础在本文之外

本文的主线没有引用一般若尔当曲线定理；多边形情形用有限窄带和奇偶性作了证明。仍使用实平面的基本连续性、有限紧集的正距离、三角形内角和、内积与余弦公式。

支撑半空间与凸多面体的等价刻画、正多面体坐标构造的完整精确代数展开、球面三角形按角唯一性没有从公理逐行展开。它们的用途分别已标明；不应把这篇笔记描述成从零建立全部欧氏与球面几何。

第 12 章：问题回查、练习与来源

返回目录

12.1 原对话疑问的对应位置

疑问或需要修正的说法	本文处理
为什么正多面体只有五种?	第 2—3 章参数限制，第 11 章存在与唯一
凸性的严格定义是什么?	第 1 章半空间、线段凸性与真正顶点
为什么顶点面角和严格小于 360°?	第 10 章截面与角三角不等式
空间夹角为什么满足三角不等式?	第 10.1 节向量分解及分情况
欧拉公式如何整理成参数限制?	第 2.2 节逐步除以正数
欧拉公式凭什么成立?	第 5—9 章投影、树、绕行与增边
树的边数为什么是 V−1?	第 6 章最长路径、叶子与归纳
树没有面是否只是直觉?	第 7 章自由端绕行
闭回路为什么恰好多一个面?	第 8 章分开证明至少与至多
是否必须先学完整若尔当定理?	第 4 章只用有限线段

疑问或需要修正的说法	本文处理
等于 360° 是否只能铺平?	第 10.3 节内禀平坦与折叠的区别
几何想象在证明里有什么作用?	图像帮助找路线；窄带、正距离、路径替换等步骤负责把路线变为论证

12.2 三个自检练习

练习一： 在两个互不相连的点之间加一条线段，为什么边数增加一而面数不变?

答：增加的是连接两个分量的边，没有旧路径可以与它组成闭回路；加边引理的连通条件不满足。前后分别有 $V=2, E=0, F=1, c=2$ 与 $V=2, E=1, F=1, c=1$，均满足 $V-E+F=1+c$。

练习二： 树上添一个新叶子与连通图中加回一条旧边，为什么效果不同?

答：前者的两侧能绕自由端互通；后者两端已由旧路径连接，形成简单多边形，阻止两侧互通。

练习三： 若每面是正三角形、每顶点六面相交，哪里被排除?

答：角和恰好 2π；代数上 $1/3+1/6=1/2$，无法满足有限凸多面体所要求的 $1/2+1/E>1/2$。

12.3 来源与阅读边界

主要来源为用户提供的分享对话：解释正多面体只有五种，以及本次关于“采用简单多边形情形”的补充讨论。分享页的主线按父子节点核对，保留了重复的首答片段；旧系统提示及内部非正文内容不作为笔记指令。

进一步阅读可参考 Jeff Erickson 的大学课程讲义 Simple Polygons，用于对照多边形版分割定理与一般曲线版的范围区别。本文第 4 章采用窄带与奇偶性组织自己的论证，不是该讲义的翻译。

原始分享页、主线提取、生成脚本及坐标检查记录保存在本版资料目录。全部笔记索引可用于继续阅读其他主题。

HTML 的正文、图形、公式和公式源码工具均已嵌入，可单文件离线阅读；配套 Markdown、PDF、资料和其他笔记链接需要对应文件。PDF 提供前部目录页码、内部跳转和分层书签，公式源码查看使用 HTML。