

代数基本定理笔记

第二版 · 2026-10-07（北京时间）

本版补齐正文目录、PDF 目录页码与返回目录入口，统一目录、文末索引和书签的标题定位；数学正文沿用第一版。

从复导数出发，沿着 Green 定理、柯西积分公式和 Liouville 定理，理解为什么每个非常数复系数多项式都有复根。本篇根据[原学习对话](#)整理，保留追问的逻辑重点，合并重复讲解，并补齐原对话中尚未展开的证明步骤。

配套文件：[HTML](#) · [PDF](#) · [阅读索引](#) · [原对话正文](#)。HTML 的正文、公式与公式源码工具均可单文件离线阅读；跨文件链接需要对应文件。

目录

第 1 章：目标是什么，为什么复分析能证明它	4
第 2 章：复可微为什么施加了更强的条件	5
第 3 章：复曲线积分、方向与 ML 估计	7
第 4 章：Green 定理是怎样由一维微积分拼起来的	9
第 5 章：柯西积分定理的条件与有洞区域	12
第 6 章：挖掉一个小圆，推导柯西积分公式	14
第 7 章：公式中的函数、核和整个被积函数	16
第 8 章：导数公式、柯西估计与 Liouville 定理	18
第 9 章：完整证明代数基本定理	20
第 10 章：欧拉公式为什么能把圆写成指数	23
第 11 章：比值判别、绝对收敛与任意重排	25
第 12 章：公式速查、复习问题与来源核对	28

阅读路线与符号

先读第 1 章看目标；第 2—3 章建立导数与积分；第 4 章补 Green 定理；第 5—7 章专门处理你反复追问的柯西定理、挖洞、核与函数的区别；第 8—9 章完成代数基本定理。第 10—11 章回补圆周参数化用到的欧拉公式、绝对收敛和重排；第 12 章用于复习和核对原对话。

记号	含义
$z = x + iy; \bar{z} = x - iy$	复数与复共轭； $i^2 = -1$
$f = u + iv$	u, v 是函数的实部、虚部，都是实二元函数
u_x, u_y, v_x, v_y	对实坐标的偏导数
$D; \partial D$	平面区域；它的整个定向边界
$\gamma(t); L(\gamma)$	分段光滑的曲线参数化；曲线长度
$\oint; dA$	闭合曲线积分；面积元 $dx dy$
$C_r^+; C_r^-$	半径为 r 的圆，分别逆时针、顺时针
$z_0; \zeta$	待求值的内部点；柯西公式中的积分变量
C^1	一阶实偏导存在且连续；不同于“只在一点复可微”
$\mathbb{C}[x]$	系数为复数的多项式环； x 是形式变量

本篇默认曲线分段 C^1 ，边界由有限条互不相交的分段光滑简单闭曲线组成，积分方向均明确说明。柯西公式的基本版本使用正向简单闭曲线；多次绕行需要另加绕数。

第 1 章：目标是什么，为什么复分析能证明它

[返回目录](#)

1.1 系数在复数域，根也在复数域

代数基本定理的标准表述是：若

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x], \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

则存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使 $p(\alpha) = 0$ 。

“非常数”不可省略：常数多项式 **1** 没有根；零多项式则处处为零，次数不按上述方式定义。系数可以是任意复数，并非只允许有理数。由于 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ ，有理系数多项式也包含在结论中，但它的根未必是有理数。例如 $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无根，却在 $\mathbb{C}$ 中有根。

把形式变量换成复变量 z 后， $p(z)$ 同时是一个复函数。代数问题于是进入复分析。

1.2 反证法的最后一跳

假设 $p(z)$ 在整个复平面都不为零，定义

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

它在整个复平面全纯；最高次项控制无穷远处的增长，因此 $f(z) \rightarrow 0$ 。再在有限闭圆盘上用连续性和紧致性，得到 f 全局有界。

Liouville 定理说：**有界整函数必为常数**。于是 $1/p$ 是常数，继而 p 是常数，与 $n \geq 1$ 矛盾。第 9 章会把增长估计、有限圆盘的下界、常数不能为零这几步全部写出。

真正的分析力量集中在

$$\text{柯西导数公式} \implies |f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \implies f'(z_0) = 0.$$

M 是整个复平面的统一上界，而 R 可以任意大。一个固定的非负数被任意小的上界压住，只能等于零。

1.3 本篇的证明依赖，避免循环

原对话通过 Green 定理证明柯西定理。Green 定理需要连续偏导，因此这一路线先适用于 C^1 且全纯的函数。不能先借柯西公式推出“全纯函数自动光滑”，再拿这个结论去证明柯西公式本身。

本篇沿用并严格完成 C^1 路线。最终使用的 $1/p$ 是分母处处非零的有理函数，直接由实坐标表达式就知道它光滑，不需要提前使用柯西公式。因此这个版本已经足够完整证明代数基本定理。

一般全纯函数无须另假设 C^1 ，也满足柯西定理与公式；去掉额外正则性条件需要柯西-古尔萨定理等论证。本篇说明这个一般结论，但不把其完整证明冒充为 Green 路线已经完成的内容。

第 2 章：复可微为什么施加了更强的条件

[返回目录](#)

2.1 差商必须有一个真正的二维极限

复导数定义为

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

h 可以沿实轴、虚轴、任意射线，也可以沿弯曲路径趋近零。必须对所有趋近方式得到同一极限。只检验若干方向，甚至每条固定射线，都不能代替整个二维极限。

在开集上处处复可微，叫作全纯；在整个 $\mathbb{C}$ 上全纯，叫作整函数。只在一点复可微，不足以推出附近全纯，更不能直接推出无限次可微。

例如 $f(z) = z^2$ ：

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \rightarrow 2z.$$

这个计算不依赖 h 的方向，因此 $f'(z) = 2z$ 。同理，所有复系数多项式都是整函数。

反例是 $f(z) = \bar{z}$ 。在任一点，其差商都为 $\bar{h}/h$ 。若 $h = t$ 为实数，结果是 1；若 $h = it$ ，结果是 -1 。所以共轭函数处处不复可微，尽管作为实平面的映射 $(x, y) \mapsto (x, -y)$ ，它十分光滑。

2.2 从两条坐标轴推导柯西—黎曼方程

写 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 。沿实轴 $h = \Delta x$ 取差商，得到

$$f'(z_0) = u_x + iv_x.$$

沿虚轴 $h = i\Delta y$ ，由于 $1/i = -i$ ，得到

$$f'(z_0) = \frac{u_y + iv_y}{i} = v_y - iu_y.$$

若复导数存在，这两个数必须相等；比较实部、虚部：

$$\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.}$$

这就是柯西—黎曼方程，简称 CR 方程。复可微本身保证这里的偏导存在。

对 z^2 ，有 $u = x^2 - y^2$ 、 $v = 2xy$ ；于是 $u_x = v_y = 2x$ ， $u_y = -2y = -v_x$ 。对 $\bar{z}$ ，有 $u = x$ 、 $v = -y$ ，故 $u_x = 1$ 而 $v_y = -1$ ，CR 方程失败。

2.3 必要条件何时成为充分条件

只知道一个点的偏导满足 CR，不一定复可微。若实二元函数 u, v 在该点实可微，则一阶展开为

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(|h|), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(|h|).\end{aligned}$$

代入 CR 方程后,

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (u_x + iv_x)h + o(|h|).$$

除以 h , 误差的模趋于零, 因此复导数存在。偏导在邻域连续是保证实可微的一个常用充分条件。

几何上, 实可微只要求一个任意实线性近似; 复可微要求线性近似必须是“乘以一个复数”。对应矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad f'(z_0) = a + ib.$$

它是旋转与伸缩的组合, 不能随意把两个方向拉伸成不同倍数。这比普通二维实可微增加了结构约束。邻域中处处满足这样的条件, 才产生全纯函数的强刚性。

第 3 章：复曲线积分、方向与 ML 估计

[返回目录](#)

3.1 定义：沿曲线代入参数

若 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 分段光滑, f 在曲线上连续, 定义

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

复数积分按实部、虚部分别进行。符号 dz 不是曲线长度元; 长度元为 $|\gamma'(t)|dt$, 而 $dz = \gamma'(t)dt$ 携带方向。

例如从 0 到 $1 + i$ 的直线 $\gamma(t) = (1 + i)t$, $0 \leq t \leq 1$:

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^1 (1+i)^2 t dt = \int_0^1 2it dt = i.$$

3.2 原函数与闭曲线

如果在曲线经过的开集上 $F' = f$ ，由链式法则

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \gamma'(t),$$

所以

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

因此具有单值原函数时，积分只依赖端点；闭曲线的积分为零。上例也可由原函数 $F(z) = z^2/2$ 直接算出。

反向走曲线，积分变号： $\int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz$ 。分段连接曲线，积分相加。这两条规则解释了以后“切口抵消”和“内边界负号”。

3.3 单位圆上的特殊积分

逆时针单位圆可写成

$$z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad dz = ie^{it} dt.$$

于是

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

更一般地，令 $z = z_0 + re^{it}$ ，对任意 $r > 0$ ：

$$\oint_{C_r^+} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

半径消掉了，结果只反映绕行方向和圈数。顺时针一圈是 $-2\pi i$ ，逆时针两圈是 $4\pi i$ 。第 10 章补欧拉公式的依据；也可直接用 $z = z_0 + r(\cos t + i \sin t)$ 做同样计算。

$1/z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上没有全局单值全纯原函数，否则所有闭曲线积分都应为零。局部复对数可以作为原函数，但绕原点一圈会改变辐角，不能不加限制地使用一个全局的 $\log z$ 。

3.4 ML 不等式从哪里来

先对参数积分使用三角不等式：

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \left(\max_{z \in \gamma} |f(z)| \right) \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

最后一个积分就是曲线长度，所以

$$\boxed{\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma), \quad M = \max_{\gamma} |f|.$$

连续函数在紧曲线像上能取到最大值；更一般时用上确界。小圆误差估计和 Liouville 定理都只需这条不等式。

第 4 章：Green 定理是怎样由一维微积分拼起来的

[返回目录](#)

4.1 定理和条件

设 P, Q 在包含闭区域 $\overline{D}$ 的开集上属于 C^1 ， D 有规则边界，取正向边界，即行进时区域始终在左侧。Green 定理为

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

有洞时 ∂D 是整个边界，包含外边界和全部内边界。下面先证明矩形，再说明简单曲边区域及有限拼接的推广。

4.2 矩形上先证明一半

取 $D = [a, b] \times [c, d]$ ，逆时针方向。积分 $\oint P dx$ 在两条竖边上为零，因为 $dx = 0$ 。下边向右，上边向左：

$$\oint_{\partial D} P dx = \int_a^b P(x, c) dx - \int_a^b P(x, d) dx.$$

固定 x ，一维微积分基本定理给出

$$P(x, d) - P(x, c) = \int_c^d P_y(x, y) dy.$$

代回，利用连续函数的迭代积分：

$$\oint_{\partial D} P dx = - \int_a^b \int_c^d P_y(x, y) dy dx = - \iint_D P_y dA.$$

负号来自上边界反向，不能记成加号。

4.3 另一半及相加

对 $\oint Q dy$ ，上下两条水平边没有贡献。右边向上，左边向下：

$$\oint_{\partial D} Q dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy.$$

固定 y ，使用

$$Q(b, y) - Q(a, y) = \int_a^b Q_x(x, y) dx,$$

得到

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D Q_x dA.$$

两半相加就是 Green 定理。因此它的局部来源就是 $F(b) - F(a) = \int_a^b F'$ ，分别沿两个坐标方向使用一次。

4.4 曲边区域与内部公共边抵消

若

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

同样沿上下图像走，有

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_a^b [P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))] dx \\ &= - \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P_y(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

两条可能存在的竖直连接边仍无贡献。若区域对水平线也简单，交换 x, y 的角色可得 $Q dy$ 的另一半。圆盘等区域可这样处理，必要时在极少数端点按极限解释。

对能有限分割为这类简单区域的 $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$ ，逐块使用公式再相加。面积积分相加得到整个区域的面积积分；内部公共边在两块的正向边界中方向相反，所以抵消，最终留下 ∂D 。

此论证完整覆盖本篇所需的圆盘和挖去小圆盘的区域。更一般边界的 Green 定理还需要相应分割或逼近论证；“所有区域都随便切几块”不能替代条件说明。

4.5 为什么内边界必须顺时针

正向的统一规则是：**区域在左侧**。外圆逆时针时，内部区域在左侧。沿洞的圆周逆时针走，左侧却是洞内部，真正的区域在右侧，所以必须反向。

若把两个圆都先记成逆时针，则

$$\partial D = C_R^+ - C_r^+,$$

Green 定理成为

$$\oint_{C_R^+} (P dx + Q dy) - \oint_{C_r^+} (P dx + Q dy) = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

内圆前的负号表达定向，并不意味着每一条边界各自积分为零。

第 5 章：柯西积分定理的条件与有洞区域

[返回目录](#)

5.1 用 Green 定理和 CR 方程推导

写 $f = u + iv$ 、 $dz = dx + i dy$ ，展开：

$$f dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy).$$

假设 f 在 $\overline{D}$ 的邻域全纯，且 u, v 有连续一阶偏导。分别应用 Green 定理：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} (u dx - v dy) &= \iint_D (-v_x - u_y) dA = 0, \\ \oint_{\partial D} (v dx + u dy) &= \iint_D (u_x - v_y) dA = 0.\end{aligned}$$

最后两个零由 CR 方程给出。因此

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

这直接是整个定向边界版，区域可以有洞，只要函数在剩余区域及边界附近满足条件。

5.2 单连通版说的是另一个对象

区域通常指开且连通的集合。若其中任何闭曲线都能在区域内连续缩成一点，区域称为单连通。圆盘、整个复平面、半平面都是例子； $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和圆环不是。

正式的收缩同伦 $H(s, t)$ 除了连续、始终落在 D 、起点为原曲线、终点为常值外，还要满足

$$H(s, 0) = H(s, 1) \quad (0 \leq s \leq 1),$$

即变形过程中始终是闭曲线。原对话的形式定义省略了这一条件。

柯西定理的常见一般版本是： D 单连通且 f 在 D 全纯，则对任意分段光滑闭曲线 $\gamma \subset D$ ， $\oint_{\gamma} f dz = 0$ 。这里讨论的是任意一条闭曲线；上一节讨论的是某个区域的全部定向边界。两者不能混为同一个表述。

单连通是这个通用版本的充分条件，不能把它说成“每个具体函数、每条具体曲线积分为零的必要条件”。例如 $f = 1$ 在有洞的区域上也有原函数 z ，任意闭曲线积分仍为零。

5.3 $1/z$ 为什么不违反定理

$1/z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯，但单位圆绕着被排除的零点：

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

它不满足“在整个圆盘及其边界附近全纯”的条件，定义域也不满足单连通条件。因此闭合本身不足以保证积分为零。

在圆环 $r < |z| < R$ 上， $1/z$ 满足边界版的条件，于是

$$\oint_{C_R^+} \frac{dz}{z} - \oint_{C_r^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

两个圆分别积分非零，而定向边界总和为零，完全一致。

5.4 “切一刀”的几何直觉要怎样理解

把圆环沿连接内外边界的线切开，可以直观看到外圆、内圆反向、切口两侧构成一条边界。两侧沿同一条切线反向行走，积分抵消，留下外圆积分等于内圆积分。

若要从单连通版严格推出，应使用有细小宽度的切口，再令宽度趋于零，以连续性证明两侧积分趋于相反数；零宽切口的两侧不是两条互不相交的普通边界，不能省略极限论证。本篇实际证明用上一节的 Green 边界版，不依赖这张直觉图来完成逻辑。

第 6 章：挖掉一个小圆，推导柯西积分公式

[返回目录](#)

6.1 条件和“有奇点”的对象

设 C 是逆时针简单闭曲线，围成区域 Ω ； f 在 $\overline{\Omega}$ 的邻域全纯且属于 C^1 ， $z_0 \in \Omega$ 。本篇可以直接取 C 为圆。

考虑

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}.$$

f 在 z_0 没有奇点，但 g 可能有奇点。我们不能对原来的整个区域直接断言

$$\oint_C g d\zeta = 0.$$

在 z_0 周围挖去闭小圆盘，取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使它完全位于 Ω 中，剩下区域记作 D_ε 。在该区域及其边界附近， g 满足 Green 路线的条件。

6.2 环形区域需要整个边界

设 C_ε^+ 是以 z_0 为中心的小圆，逆时针。实际的内边界是顺时针，所以

$$\partial D_\varepsilon = C - C_\varepsilon^+.$$

应用边界版柯西定理：

$$0 = \oint_C g(\zeta) d\zeta - \oint_{C_\varepsilon^+} g(\zeta) d\zeta.$$

因此

$$\boxed{\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.}$$

这正是原对话中“挖了洞以后还需要过渡”的答案：使用的是定向边界之和，不是说外边界单独积分为零。

6.3 小圆积分：精确项与误差项

把函数拆成

$$f(\zeta) = f(z_0) + [f(\zeta) - f(z_0)].$$

于是小圆积分为

$$f(z_0) \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + E_\varepsilon, \quad E_\varepsilon = \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

第一项由第 3 章的圆周计算，恰好是 $2\pi i f(z_0)$ ，不含近似。

第二项用 ML 不等式。小圆长度为 $2\pi\varepsilon$ ，分母模为 ε ，故

$$\begin{aligned}
|E_\varepsilon| &\leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{\max_{|\zeta-z_0|=\varepsilon} |f(\zeta) - f(z_0)|}{\varepsilon} \\
&= 2\pi \max_{|\zeta-z_0|=\varepsilon} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

最后一步只使用 f 在 z_0 的连续性：给定任意误差限，足够小的整个邻域内差值都小，所以小圆上的最大值也小。不是只对某个移动点成立的点态论证。

6.4 从极限得到精确等式

外边界积分不依赖 ε ，而每个足够小的小圆积分都与它相等。令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i f(z_0).$$

即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

这就是柯西积分公式。已知边界上的函数值，通过核 $1/(\zeta - z_0)$ 的加权积分，提取出内部的函数值。

注意曲线须正向绕内部点一次；一般闭曲线的对应版本带有绕数，不能把任意绕行都直接写成上述等式。

第 7 章：公式中的函数、核和整个被积函数

[返回目录](#)

7.1 三个对象分别是谁

这是原对话中最容易混淆的一点。柯西公式中的

$$\underbrace{f(\zeta)}_{\text{待恢复的全纯函数}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\zeta - z_0}}_{\text{核}} = \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}}_{\text{整个被积函数}}$$

不是三个同名对象。前提要求 f 在内部及边界附近全纯；核在 z_0 的奇点是公式刻意引入的结构。

7.2 积分 $1/\zeta$ 时，公式里的 f 可以是 1

取 $f(\zeta) = 1$ 、 $z_0 = 0$ ，于是整个被积函数是 $1/\zeta$ 。公式给出

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

所以确实是在积分 $1/\zeta$ ，而要求全纯的函数对象是常数函数 $f = 1$ 。这与直接参数化算出 $2\pi i$ 相符。

7.3 如果真的令 $f(\zeta) = 1/\zeta$ 并取 $z_0 = 0$

此时整个被积函数变成 $1/\zeta^2$ ，而 $f(0)$ 根本未定义，所以不能使用柯西积分公式。

虽然

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = 0,$$

也不能据此解释成 $f(0) = 0$ 。积分为零可直接由参数化计算，或由原函数 $-1/\zeta$ 证明；它不修复缺失的前提。

7.4 $1/\zeta$ 在不包含零点的小圆内可以使用公式

取 $z_0 = 2$ ，圆 $|\zeta - 2| = 1/2$ 的内部与边界均避开零点，故

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-2|=1/2} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 2)}.$$

右边的积分是 πi 。这里公式中的函数 $f(\zeta) = 1/\zeta$ 满足前提。

若改为大圆 $|\zeta| = 3$ ，内部还包含 f 自身的奇点 0 ，不能直接套公式。部分分式给出

$$\frac{1}{\zeta(\zeta - 2)} = -\frac{1}{2\zeta} + \frac{1}{2(\zeta - 2)}.$$

两个基本积分分别是 $2\pi i$ ，贡献抵消，因此大圆上的总积分为零。这不是公式矛盾，而是它的前提已经失败。

第 8 章：导数公式、柯西估计与 Liouville 定理

[返回目录](#)

8.1 求导的是内部点，积分变量不变

为了区分变量，把内部点暂记作 w 。柯西公式为

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta.$$

固定曲线 C ，取 w 在内部。形式求导时

$$\frac{d}{dw}(\zeta - w)^{-1} = (\zeta - w)^{-2},$$

两个负号抵消。但不能只写形式计算，还要解释为什么可以把导数放进积分。

8.2 用差商和一致估计补齐交换步骤

设 $d = \text{dist}(w, C) > 0$ ，取 $|h| < d/2$ ，且 $w + h$ 仍在内部。两次柯西公式相减并除以 h ：

$$\frac{f(w + h) - f(w)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w - h)(\zeta - w)} d\zeta.$$

核与极限核的差满足

$$\left| \frac{1}{(\zeta - w - h)(\zeta - w)} - \frac{1}{(\zeta - w)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{d^3}.$$

因为 $|\zeta - w| \geq d$ 、 $|\zeta - w - h| \geq d/2$ 。这个上界对曲线上所有 ζ 都成立，因此核一致收敛。乘上曲线上有限的 $\max |f|$ ，再用 ML 不等式，积分误差也趋于零。所以

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\zeta.$$

继续对核求导，在内部紧子集上分母始终与零有正距离，同样的估计允许逐次求导，得到

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0.$$

这说明一旦在邻域上有柯西公式，就能推出所有阶导数。结合一般柯西定理，全纯自动无限次复可微；更进一步还可由核的几何级数展开推出局部幂级数表示。本篇完整使用的是前述 C^1 版本，不需要先借这些后续结论补充 Green 定理的条件。

8.3 柯西估计

在以 z_0 为中心、半径 R 的圆上，若 $|f| \leq M_R$ ，并且 f 在整个闭圆盘附近满足公式条件，则

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} (2\pi R) \frac{M_R}{R^{n+1}} \\ &= \frac{n! M_R}{R^n}. \end{aligned}$$

因此

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R}.$$

对一般函数， M_R 可能随 R 增长，不能随便令右边趋于零。Liouville 的关键是存在一个与半径无关的全局上界 M 。

8.4 Liouville 的证明

假设 f 在整个复平面全纯且属于本篇已证的 C^1 类，并且对所有 z 都有 $|f(z)| \leq M$ 。任取 z_0 ，由于任意大的闭圆盘都位于定义域内，

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad \text{对所有 } R > 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$ ，得 $f'(z_0) = 0$ 。 z_0 任意，所以导数处处为零。

补上最后一步：任取 $a, b \in \mathbb{C}$ ，沿线段 $\gamma(t) = a + t(b - a)$ ，有

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))(b - a) = 0.$$

实部、虚部作为实函数都为常数，故 $f(a) = f(b)$ ， f 是常数。

一般 Liouville 定理同样不需要额外假设 C^1 ，因为一般柯西公式成立；在代数基本定理的应用中，我们已经独立知道 $1/p$ 光滑，因此没有逻辑缺口。

8.5 “估计导出矛盾”到底是哪一层

Liouville 本身用估计直接把导数压成零，并不一定要反证。用于代数基本定理时，才把它放入“假设多项式无根”的反证链中。你在原对话提出的直觉可以精确写成：**柯西公式提供导数估计，估计给出刚性，刚性排除无根的非常数多项式。**

第 9 章：完整证明代数基本定理

[返回目录](#)

9.1 假设无根，倒数为什么光滑且全纯

设 p 非常数，反设 $p(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 成立。写 $p = u + iv$ ，则

$$\frac{1}{p} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}.$$

u, v 是实坐标的多项式，分母处处为正，所以倒数的实部、虚部都是光滑实函数。另一方面由复差商的倒数法则，

$$\left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{p'}{p^2},$$

因此 $1/p$ 是整函数，并满足 Green 路线所需的正则性。

9.2 无穷远处：最高次项不能被低次项抵消

写

$$p(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad a_n \neq 0.$$

反三角不等式给出

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k.$$

除以 $|z|^n$ 后，低次部分为有限和

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{k-n} \rightarrow 0.$$

所以存在 $R_0 \geq 1$ ，使 $|z| \geq R_0$ 时

$$\boxed{|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n.}$$

于是 $|p(z)| \rightarrow \infty$ ，且

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|R_0^n}.$$

这个估计对所有方向同时成立，不是只沿实轴观察增长。

9.3 有限闭圆盘：无零点加紧致性给出正下界

在紧集 $K = \{z : |z| \leq R_0\}$ 上，连续函数 $|p|$ 取得最小值 m 。无根假设保证达到最小值的点也不为零，所以

$$m = \min_{z \in K} |p(z)| > 0, \quad \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{m} \quad (z \in K).$$

单独说“每个点都不为零”并不能在任意非紧集上得到统一正下界，这里紧致性不可省略。也可以直接对连续函数 $1/p$ 在闭圆盘上取最大值。

内外两部分合并，得到全局统一上界

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M = \max \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{|a_n|R_0^n} \right\}.$$

9.4 应用 Liouville，完成矛盾

$1/p$ 是有界整函数，且属于本篇已证的光滑类，因此 $1/p = c$ 为常数。由于 $1/p(z)$ 在每个点都非零， $c \neq 0$ ，故 $p = 1/c$ 是常数，与 $n \geq 1$ 矛盾。

也可以使用无穷远处 $1/p \rightarrow 0$ ：常数 c 只能为零，但 $1/p$ 不可能为零，同样矛盾。

因此

每个非常数 $p \in \mathbb{C}[x]$ 都在 $\mathbb{C}$ 中有根。

9.5 从一个根到全部一次因子

找到根 α_1 后，用多项式除法：

$$p(x) = (x - \alpha_1)q(x) + r.$$

余数为常数，代入 α_1 得 $r = 0$ 。若 q 仍非常数，再应用已经证明的定理。每次次数下降 1，有限次得到

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

根允许重复，因此“次数为 n 就有 n 个根”应当说成计重数恰有 n 个复根。例如 $(x - 1)^2$ 只有一个不同的根，却有重数 2。等价的域论表述是 $\mathbb{C}$ 为代数闭域。

9.6 接回此前的代数学笔记

代数基本定理说明复数域中多项式可以完全分裂；它并不说明根能用系数的有限次四则运算和开方表达。五次方程的根式障碍仍由伽罗瓦群的不可解性决定。

可以接着阅读伽罗瓦理论笔记与五次方程证明框架笔记。分圆域中的复单位根则与第 10 章的欧拉公式直接相接，见多项式与分圆域笔记。

第 10 章：欧拉公式为什么能把圆写成指数

[返回目录](#)

10.1 先定义复指数，避免“直接把实数换成复数”的跳跃

定义

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

对于实数，它与熟悉的指数函数一致。对复数，先证明这个级数确实收敛，才有权用它定义函数。

因复数模满足 $|z^n| = |z|^n$ ，绝对值级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}.$$

若 $z \neq 0$, 相邻项之比为 $|z|/(n+1) \rightarrow 0 < 1$, 所以比值判别法保证收敛。 $z = 0$ 单独处理: 只有第一项为 1, 其余为零。于是对任何固定复数 z 都绝对收敛, 收敛半径为无穷大。

这里“阶乘最终压过指数”只是直觉, 严格的收敛依据是比值判别法, 第 11 章会证明它。

10.2 利用 i 的幂循环, 拆成两条实级数

对实数 θ , i 的幂按 $1, i, -1, -i$ 循环。由绝对收敛, 可把偶数项与奇数项分别收集:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

本篇使用实微积分中已经证明的正弦、余弦幂级数展开。因此

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

指数里有 i , 普通实指数 e^θ 不代表单位圆上的旋转。

10.3 模、角度与圆周参数化

由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

$$|e^{i\theta}| = 1.$$

随着 θ 从 0 增加到 2π , 它逆时针走一圈。几个特殊值是

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i2\pi} = 1.$$

任意非零复数均可写为 $z = re^{i\theta}$, $r = |z| > 0$; 角度只确定到整数倍 2π 。圆 $|z - z_0| = r$ 可写成 $z = z_0 + re^{it}$ 。

参数求导不必提前引用复指数的全纯性：对欧拉公式两边关于实参数 t 求导，

$$\frac{d}{dt}e^{it} = -\sin t + i \cos t = ie^{it}.$$

所以第 3 章使用的 $dz = ire^{it}dt$ 有清楚的实微积分依据。

第 11 章：比值判别、绝对收敛与任意重排

[返回目录](#)

11.1 比值小于一，尾项被几何级数控制

设 $a_n > 0$ ，且 $a_{n+1}/a_n \rightarrow L < 1$ 。选 $L < q < 1$ ，则存在 N ，使所有 $n \geq N$ 都满足 $a_{n+1} \leq qa_n$ 。逐次迭代，

$$a_{N+k} \leq a_N q^k \quad (k \geq 0).$$

因此

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq a_N \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_N}{1-q} < \infty.$$

有限个前项不影响收敛。比值判别法的本质就是比较几何级数，而不是仅仅判断 $a_n \rightarrow 0$ 。项趋零是必要条件，远非充分条件，例如调和级数发散。

若比值极限 $L > 1$ ，取 $1 < q < L$ ，尾项最终至少按 q 倍增长，因而不趋零，级数发散。若 $L = 1$ ，该判别法没有结论： $\sum 1/n$ 发散， $\sum 1/n^2$ 收敛，两者比值极限都为 1。

对于复级数，应把比值判别用于绝对值，而不能比较复数本身的大小关系。

11.2 绝对收敛为什么保证复级数收敛

若 $\sum |a_n| < \infty$, 则对 $m > n$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \rightarrow 0.$$

部分和因此是复数域中的 Cauchy 序列; $\mathbb{C}$ 的完备性保证其收敛。所以可以把和记成 $S = \sum a_n$ 。

11.3 任意重排不改变和: 尾项估计的完整证明

设 $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是双射。每一项恰好出现一次, 没有遗漏或重复。给定 $\varepsilon > 0$, 由绝对收敛选 N , 使

$$\sum_{n>N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ 。因为 σ 是双射, 存在 M_0 , 使当 $M \geq M_0$ 时, 重排后的前 M 项包含原来的全部前 N 项。记

$$T_M = \sum_{k=1}^M a_{\sigma(k)}.$$

$T_M - S_N$ 只是有限个编号大于 N 的项之和, 所以

$$|T_M - S_N| \leq \sum_{n>N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

原级数的尾和也满足 $|S - S_N| < \varepsilon/2$ 。于是对每个 $M \geq M_0$,

$$|T_M - S| \leq |T_M - S_N| + |S_N - S| < \varepsilon.$$

因此 $T_M \rightarrow S$, 任意重排保持和。这个证明不用先假设“剩余项的无限子级数”已经合法, 直接用有限和估计与原级数尾和就够了。

直觉是：前面有限个项包含几乎全部绝对大小；其余所有项的绝对值总量已经小，怎么搬动都无法制造一个固定大小的新贡献。

11.4 收集偶数项和奇数项，不等于写一个无限长的排列前段

偶数项、奇数项的绝对值级数都被 $\sum |a_n|$ 控制，因此各自收敛。令

$$A_m = \sum_{k=0}^m a_{2k}, \quad B_m = \sum_{k=0}^m a_{2k+1}.$$

两者之和是原级数的一个有限部分和。令 $m \rightarrow \infty$ ，得到原和等于两个子级数的和。这严格说明了欧拉公式中的拆分。

不能把“先写完所有偶数项，再写所有奇数项”字面理解成 $\mathbb{N}$ 的排列：第一组永远写不完，奇数项就不会出现。正确操作是先证明两个子级数收敛，再加它们的和。

11.5 加括号与重排的条件不同

如果原级数已经收敛，只在原顺序中把连续的有限项组成括号，每个项都最终被纳入，那么分组后的部分和就是原部分和的子序列，因此和不变，**不需要绝对收敛**。

任意重排则强得多。条件收敛的实级数，例如交错调和级数，依赖正负抵消；重排可能改变和或使其发散。这里的 Riemann 重排定理只是边界提醒，本篇没有展开其构造证明。

绝对收敛保证的是：任意排列，以及把全部项分配到已证明收敛的子级数再相加，都能安全处理。它不授权遗漏、重复项或未经定义的“无限括号”运算。

第 12 章：公式速查、复习问题与来源核对

[返回目录](#)

12.1 公式必须连着条件记

公式	使用条件与作用
$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)]/h$	真正的复平面极限，不是只比较两条轴
$u_x = v_y, u_y = -v_x$	复可微的必要条件；配合实可微可作充分条件
$\int_{\gamma} f dz = \int f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$	曲线分段光滑，函数在曲线上连续
$ \int_{\gamma} f dz \leq ML(\gamma)$	$ f \leq M$ 在曲线上成立
$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D (Q_x - P_y) dA$	连续偏导、规则区域、整个正向边界
$\oint_{\partial D} f dz = 0$	本篇证明用 C^1 全纯函数，定义在闭区域邻域
$\oint_{C_r^+} dz/(z - z_0) = 2\pi i$	$r > 0$ ，逆时针一圈
$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)/(\zeta - z_0) d\zeta$	正向简单闭曲线，内部点，公式中的函数 f 满足全纯条件
$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1} d\zeta$	固定曲线，内部点与曲线有正距离
$ f^{(n)}(z_0) \leq n!M_R/R^n$	在整个闭圆盘附近有公式； M_R 是圆周上界
$ f'(z_0) \leq M/R \Rightarrow f' = 0$	全局同一个 M ，定义域允许任意大 R
$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$	θ 为实数；由绝对收敛幂级数推导

12.2 两条容易记住的估计

小圆用于恢复函数值：曲线长度中的 ε 与核的 $1/\varepsilon$ 抵消，最后由连续性压小误差。

大圆用于控制导数：曲线长度给 R ，导数核给 $1/R^2$ ，留下 $1/R$ ；有界整函数允许让 R 任意大。

这两种极限方向不同，却都由同一条 ML 不等式完成。

12.3 自测：能回答这些问题，就抓住了主线

- 1. 为什么 $\bar{z}$ 作为实映射很光滑，却没有复导数？
- 2. CR 方程成立为什么不能单独保证一点复可微？
- 3. Green 定理中 $-P_y$ 的负号来自哪条边的方向？
- 4. 圆环上全纯为什么只保证外圆积分等于内圆积分？
- 5. $\oint dz/z = 2\pi i$ 与柯西定理为什么不矛盾？
- 6. 积分 $1/z$ 时，公式里要求全纯的 f 为什么可以是 1？
- 7. 小圆误差趋零究竟用了哪个连续性估计？
- 8. 把导数放入积分为什么需要内部点与曲线保持距离？
- 9. 只有圆周上界 M_R 时，为什么不能直接推出 Liouville？
- 10. “无根”如何配合闭圆盘紧致性给出 $|p|$ 的正下界？
- 11. 为什么“复根存在”仍不等于“能用根式写出复根”？
- 12. 绝对收敛如何控制任意重排后的部分和？为什么不改顺序的有限分组要求更弱？

12.4 原对话覆盖索引

原分享中共有 26 段可见数学回答，下表以出现顺序编号。系统消息、隐藏推理及“Original custom instructions no longer available”占位文本不计入数学正文。原用户追问和助手正文按顺序保留在资料目录；下表说明每段在本篇的落点。

原回答	主题	本篇位置
A01	目标、证明路线、复导数、共轭反例	第 1—2 章

原回答	主题	本篇位置
A02	CR 方程与必要、充分条件	第 2 章
A03	曲线积分、原函数、单位圆积分	第 3 章
A04	Green 与 CR 推出柯西定理	第 4—5 章
A05	挖洞、柯西公式、小圆误差	第 6 章
A06	圆环、整个定向边界、切口	第 5—6 章
A07	单连通、收缩、洞与绕数	第 5 章
A08	小圆积分与精确等式	第 6 章
A09	$1/z$ 能否使用柯西公式	第 7 章
A10	区分公式里的函数与整个被积函数	第 7 章
A11	柯西导数公式	第 8 章
A12	Liouville 的导数估计	第 8 章
A13	估计与最终矛盾的关系	第 8—9 章
A14	复可微的强约束	第 2、8 章
A15	柯西相关公式汇总	第 12 章
A16	Green 定理的矩形证明	第 4 章
A17	简单区域、拼接与内边界方向	第 4 章
A18	$\mathbb{C}[x]$ 与 $\mathbb{Q}[x]$	第 1 章
A19	系数与根的所在域	第 1 章

原回答	主题	本篇位置
A20	欧拉公式及特殊角度	第 10 章
A21	欧拉公式的幂级数推导	第 10 章
A22	代入 $i\theta$ 为什么收敛	第 10—11 章
A23	任意固定复数的绝对收敛	第 10—11 章
A24	比值判别的几何级数依据	第 11 章
A25	重排与有限分组的区别	第 11 章
A26	绝对收敛保证任意重排的证明	第 11 章

12.5 本版补充与校正

本版补充了：ML 不等式的推导；CR 在实可微假设下的充分性；积分与求导交换的一致估计；导数为零推出常数的线段证明；多项式最高次项的统一下界；有限闭圆盘上的正下界；从一个根递归得到全部一次因子；复级数的 Cauchy 收敛说明；用有限和完成重排证明；偶数、奇数子级数拆分的合法性。

本版校正或收紧了：一点复可微与邻域全纯的区别；Green 路线的 C^1 条件和循环论证风险；同伦必须保持闭曲线；单连通是通用充分条件，不是具体积分为零的逐例必要条件；切一刀的严格处理需要细切口极限；柯西公式需正向绕内部点一次；比值判别中的 $z = 0$ 例外；不改顺序的连续有限分组对任何收敛级数都保持和；收集两个无限子级数不能字面解释成先排完第一组。

本篇作为已知使用的实分析基础是：一维微积分基本定理、连续函数的迭代积分、紧集上的极值定理、实数与复数的完备性，以及正弦、余弦的实幂级数展开。一般柯西—古尔萨定理、一般同伦不变性、留数定理和 Riemann 重排定理未在本篇完整证明。原对话最后列出的 Riemann 映射定理只是后续学习建议，未发生实际讲解。

学习重点是把每一步的条件、对象与估计连接起来：不是背下“全纯所以积分为零”，而是确认函数在哪个区域全纯、积分的是哪条定向边界，以及哪一个量能在极限中被压到零。